

۱- گزینه ۱ صحیح است.

با مشتق گیری از تابع در ضابطه اول به $x = 0, \pm 1$ می‌رسیم که با توجه به شرط این ضابطه ($x > 1$) تنها $x = 1$ به عنوان بحرانی قبول است و در ضابطه دوم به $x = \frac{3}{2}$ می‌رسیم که در شرط آن صدق نمی‌کند و نمی‌تواند بحرانی باشد.

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2} & x > 1 \\ 3 - 2x & x < 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = 0, \pm 1 & x > 1 \\ x = \frac{3}{2} & x < 1 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1$$

هیچ کدام از نقاط ریشه‌های مخرج و صورت در شرایط مورد نظر صدق نمی‌کند پس بحرانی محسوب نمی‌شوند، فقط چون در $x_0 = 1$ ، مشتق چپ و راست نابرابر می‌شوند ($f'_-(1) = 1, f'_+(1) = 0$) پس $x_0 = 1$ تنها بحرانی تابع است.

۲- گزینه ۳ درست است.

ابتدا برکت را در اطراف $x_0 = 0$ تعیین مقدار می‌کنیم:

$$\begin{cases} y_{0-} = \sin \pi(x + 1) \\ y_{0+} = \sin \pi x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1 = \pi \cos \pi(x + 1) \\ m_2 = \pi \cos \pi x \end{cases} \xrightarrow{x_0 = 0} \begin{cases} m_1 = -\pi \\ m_2 = +\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left| \frac{\pi - (-\pi)}{1 + (\pi \times -\pi)} \right| = \operatorname{tg}^{-1} \left| \frac{2\pi}{1 - \pi^2} \right| = \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{2\pi}{\pi^2 - 1} \right)$$

۳- گزینه ۴ صحیح است.

در سوالات خط مماس ما به دو اطلاعات نیاز داریم تا معادله خط را بنویسیم: (۱) شیب خط، (۲) یک نقطه روی آن که در این سوال از ما در کمترین شیب را می‌خواهد پس خط مماس را در نقطه‌ای با کمترین شیب بدست می‌آوریم. ابتدا با کمک مشتق شیب خط را بدست می‌آوریم:

$$m = y' = 3x^2 - 6x + 5 \xrightarrow{\Delta < 0} y' = 3(x^2 - 2x) + 5$$

$$\Rightarrow y' = 3(x - 1)^2 + 2 \geq 2$$

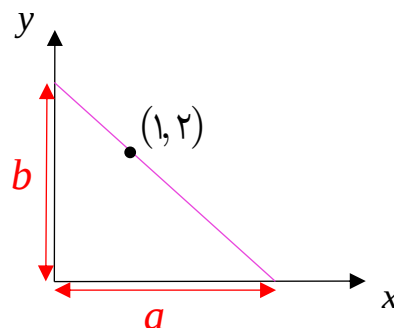
پس مینیمم شیب ۲ است که در $x_0 = 2$ و $y_0 = 3$ اتفاق می‌افتد. معادله خط از $y - y_0 = m(x - x_0)$ بدست می‌آید پس با جایگذاری مقادیر معادله خط را می‌نویسیم.

$$y - 3 = 2(x - 1) \Rightarrow y - 3 = 2x - 2 \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$$

۴- گزینه ۲ صحیح است.

از بین تمام مثلث‌هایی که در ربع اول با محورهای مختصات و خط گذرنده از نقطه $(1, 2)$ میتوان رسم کرد باید به دنبال مثلی باشیم که مساحت آن مینیمم شود پس این یک مسئله بهینه‌سازی است.

$$\text{تابع هدف: } \min(S) = \frac{1}{2}ab$$



$$\text{تابع کمکی: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \xrightarrow{(1,2) \in \mathcal{L}} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \Rightarrow \frac{1}{a} = 1 - \frac{2}{b} \Rightarrow a = \frac{b}{b-2}$$

$$\text{تابع هدف اصلاح شده: } S = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{b-2} \right) b = \frac{b^2}{2(b-2)}$$

$$\xrightarrow{S'_b = 0} \frac{2(b)(2)(b-2) - 2b^2}{4(b-2)^2} = 0$$

برای اینکه این کسر برابر صفر شود باید صورت آن صفر شود:

$$4b^2 - 4b - 2b^2 = 0 \rightarrow 2b(b-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 2 \end{cases}$$

b ارتفاع مثلث است پس نمی‌تواند صفر باشد

$$\Rightarrow b = 2 \rightarrow S_{\min} = \frac{b^2}{2(b-2)} = \frac{4}{2(2)} = 1$$

۵- گزینه ۲ صحیح است.

روش نیوتن می‌تواند تعداد و علامت ریشه‌ها را بیان کند:

$$y = x^3 - 3x^2 \xrightarrow{\text{ریشه ها}} y = 0 \Rightarrow x = 0, 3$$

$$y' = 3x^2 - 6x \xrightarrow{\text{اکسترمم}} y' = 0 \Rightarrow x = 0, 2$$

$$y'' = 6x - 6 \xrightarrow{\text{عطف}} y'' = 0 \Rightarrow x = 1$$

